Physics 1

Lecture 8

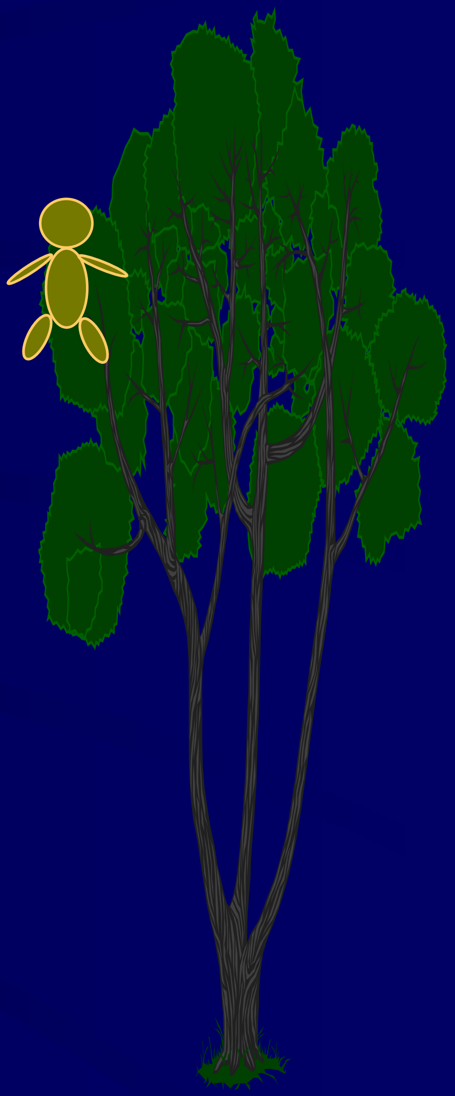
Sahraei

Physics Department,

Razi University

http://www.razi.ac.ir/sahraei/

Shooting the Monkey

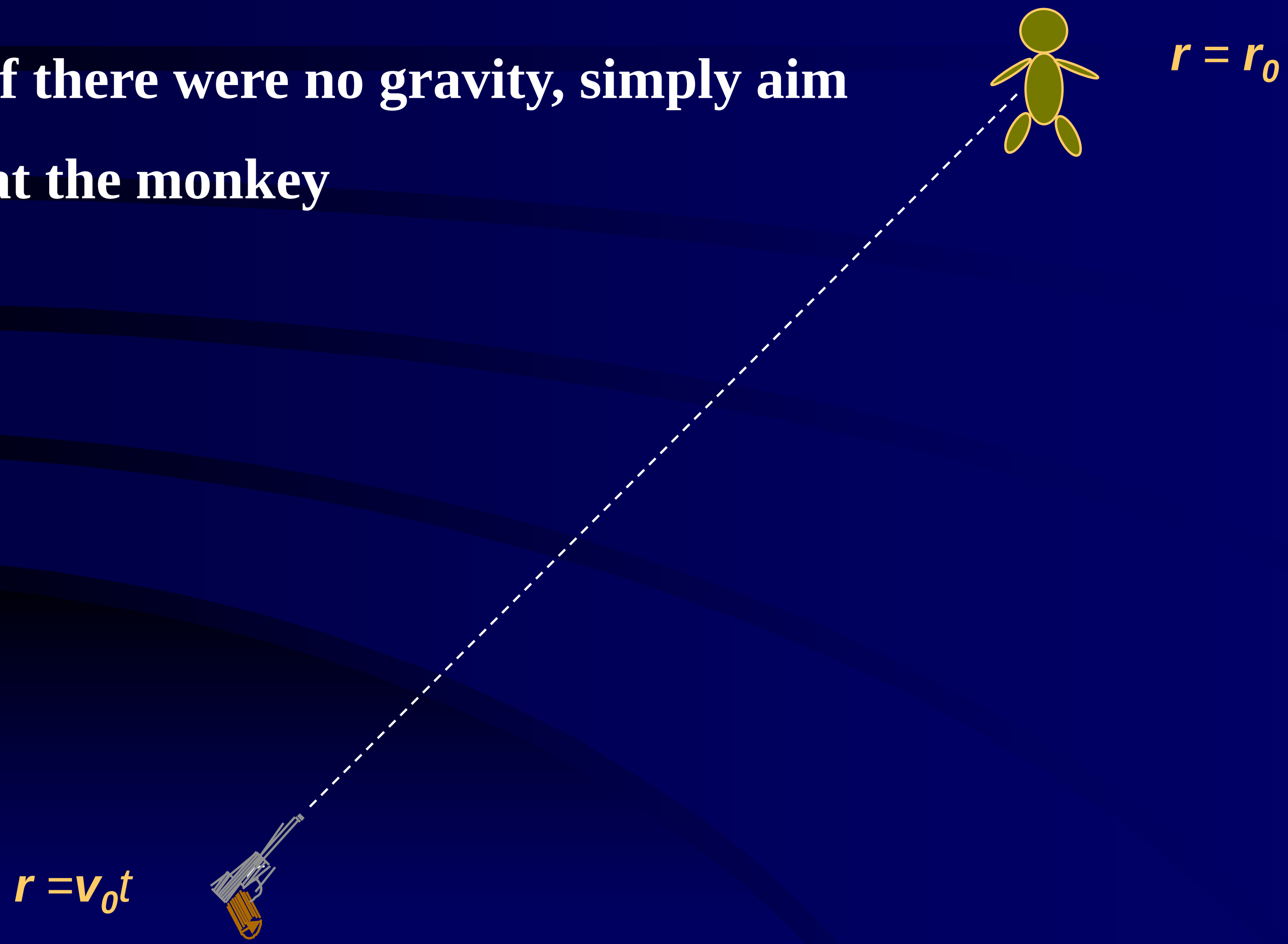


- Where does the zookeeper aim if he wants to hit the monkey?

  (He knows the monkey will let go as soon as he shoots !)

Shooting the Monkey...

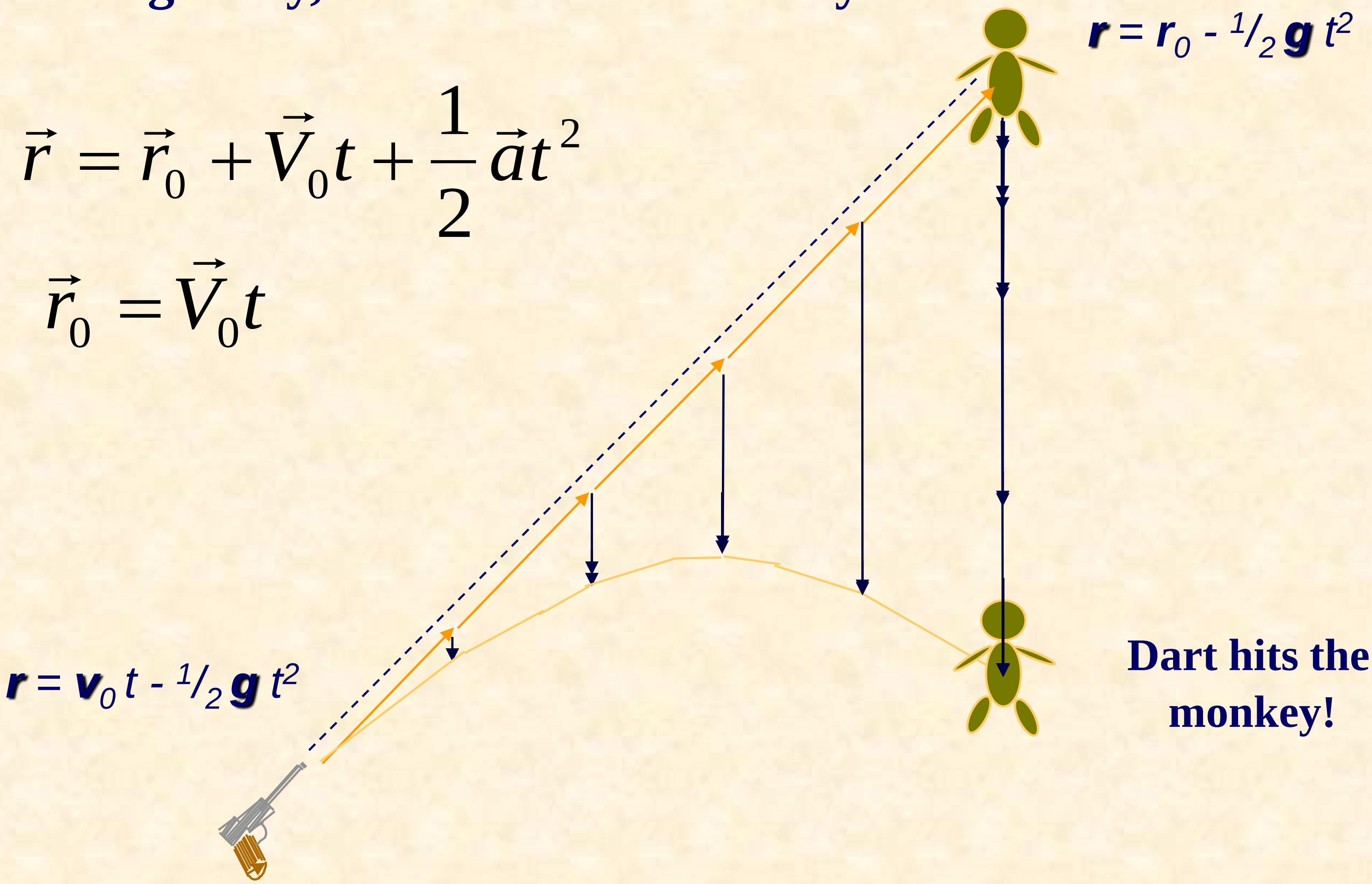
- **If there were no gravity, simply aim at the monkey**



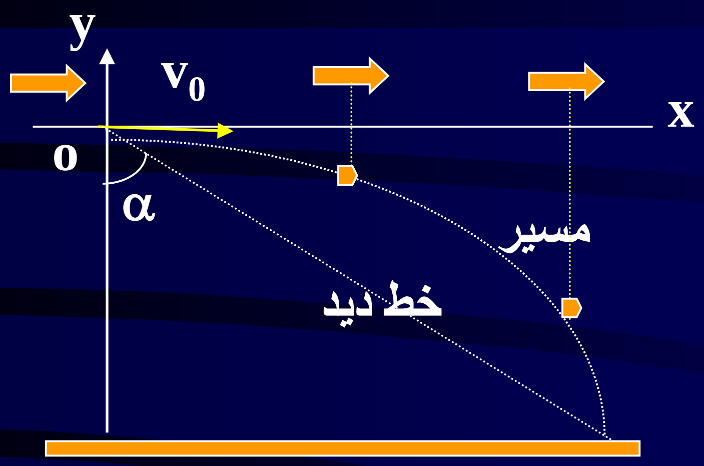
- **With gravity, still aim at the monkey!**

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\vec{r}_0 = \vec{V}_0 t$$



مثال: می خواهیم بسته ای را از هواپیما روی هدف بیندازیم. هواپیما با سرعت ثابت افقی 155 km/h در ارتفاع 225 m از هدف پرواز می کند، جهت پرواز آن به طرف نقطه ای مستقیما در بالای هدف است. زاویه خط دید هدف از هواپیما α در لحظه رها کردن بسته چقدر باشد تا بسته به هدف برسد؟



$$y = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$= (v_0 \sin \varphi_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\varphi_0 = 0 \ , \quad y = -225\text{m}$$

$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}} = \sqrt{-\frac{2 \times (-225m)}{9.8m/s^2}} = 6.78s$$

$$x = v_{x_0} t = (155km/h)(1000m/km)(1h/3600s)(6.78s) = 292m$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{x = 292m}{y = 225m} = 52^0$$

مثال: فوتبالیستی توپ را با سرعت اولیه 15.5 m/s با زاویه 36^0 نسبت به افق شوت می کند.با فرض اینکه توپ در یک صفحه قائم حرکت کند(الف) زمان t_1 برای اینکه توپ به نقطه اوج مسیر خود برسد چقدر است؟

$$v_y = v_{y_0} + a_y t = v_0 \sin\varphi_0 - gt$$

$$v_y = 0, \quad t_1 = \frac{(15.5m/s)(\sin 36^0)}{9.8m/s^2} = 0.93s$$

(ب) توپ تا چه ارتفاعی اوج می کیرد؟

$$y = (v_0 \sin\varphi_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{\max} = (15.5m/s)(\sin 36^0)(0.93s) - \frac{1}{2}(9.8m/s^2)(0.93s)^2 = 4.2m$$

(ج) برد توپ و زمان پرواز آن چقدر است؟

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\varphi_0 = \frac{(15.5m/s)^2}{9.8m/s}\sin 72^0 = 23.3m$$

$$y = 0 \quad , \quad t_2 = \frac{2v_0 \sin\varphi_0}{g} = \frac{2(15.5m/s)(\sin 36^0)}{9.8m/s^2} = 1.86s \qquad t_2 = 2t_1$$

$$and \quad x = x_0 + v_{x_0} t$$

$$if \quad t = t_2 \rightarrow R = v_{x_0} t_2 = (v_0 \cos\varphi_0) t_2 = 23.3m$$

د) سرعت توپ را در لحظه برخورد به زمین پیدا کنید؟

$$v_x = v_0 \cos\varphi_0 = (15.5m/s)(\cos 36^0) = 12.5m/s$$

$$t = t_2 \ , \ v_y = v_0 \sin\varphi_0 - gt = (15.5m/s)(\cos 36^0)$$

$$-(9.8m/s^2)(1.86s) = -9.1m/s$$

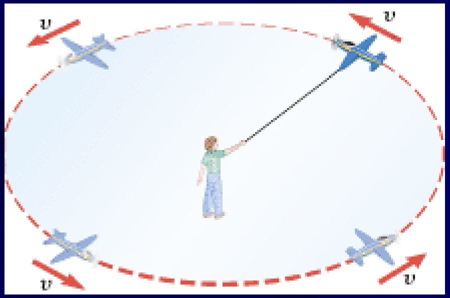
$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \sqrt{(12.5m/s)^2 + (-9.1m/s)^2} = 15.5m/s$$

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-9.1}{12.5} \rightarrow \varphi = -36^0$$

Uniform Circular Motion

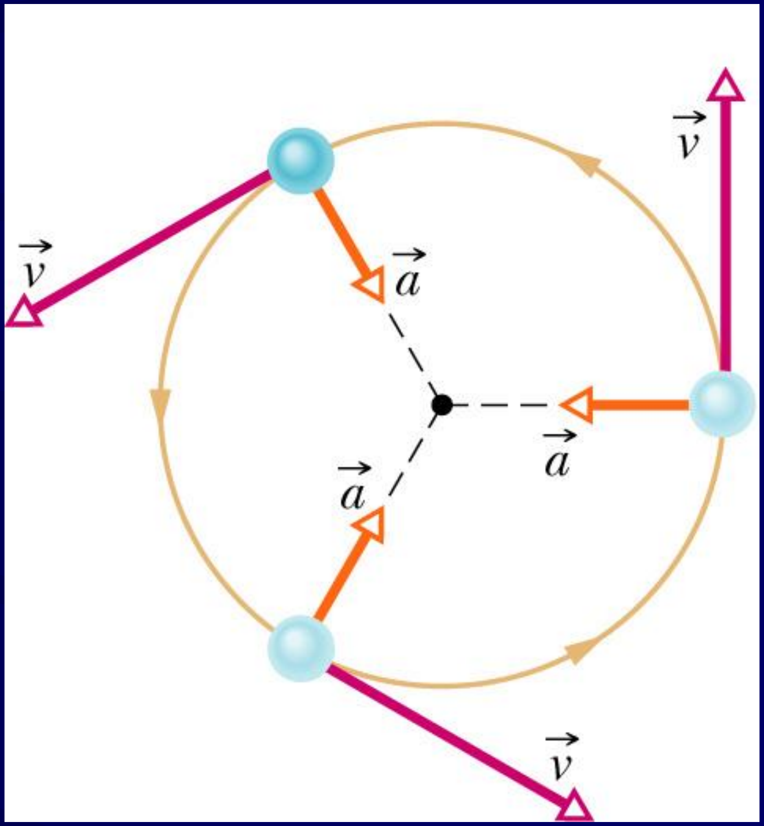
Uniform Circular Motion

- **Suppose that we have a particle on the end of a string and we are swinging it in a circle at a constant (e.g., *uniform*) speed**
- **We would not normally think that the particle is accelerating as it's speed is constant**
- **But the particle's velocity (being a vector quantity) is <u>not</u> constant (because it is constantly changing direction)**



- **Given our definition of acceleration (a non-constant velocity), then it must be that the particle is accelerating**

- **Here we see the velocity and acceleration vectors for our particle moving at a uniform speed in a circle**



- The velocity vector is always tangent to the circle in the direction of motion

- As a result, the acceleration is directed *radially inward*

- This inward directed acceleration is called *centripetal* ("center seeking") acceleration and is given by the equation:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

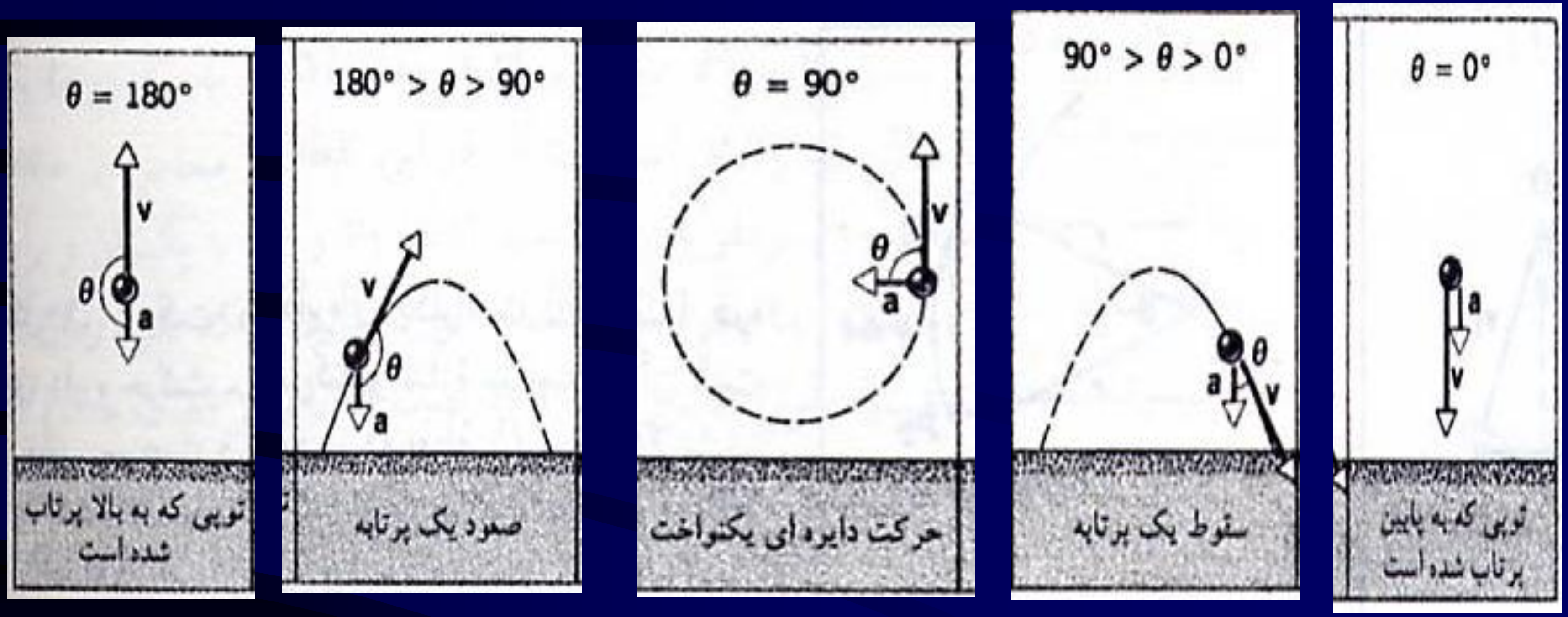
where a is the magnitude of the acceleration, r is the radius of the circle and v is the speed of the particle

- We will derive this equation shortly…

- The *period of revolution* (or simply the period) is the time it takes to go around the circle once
- The period is given by:

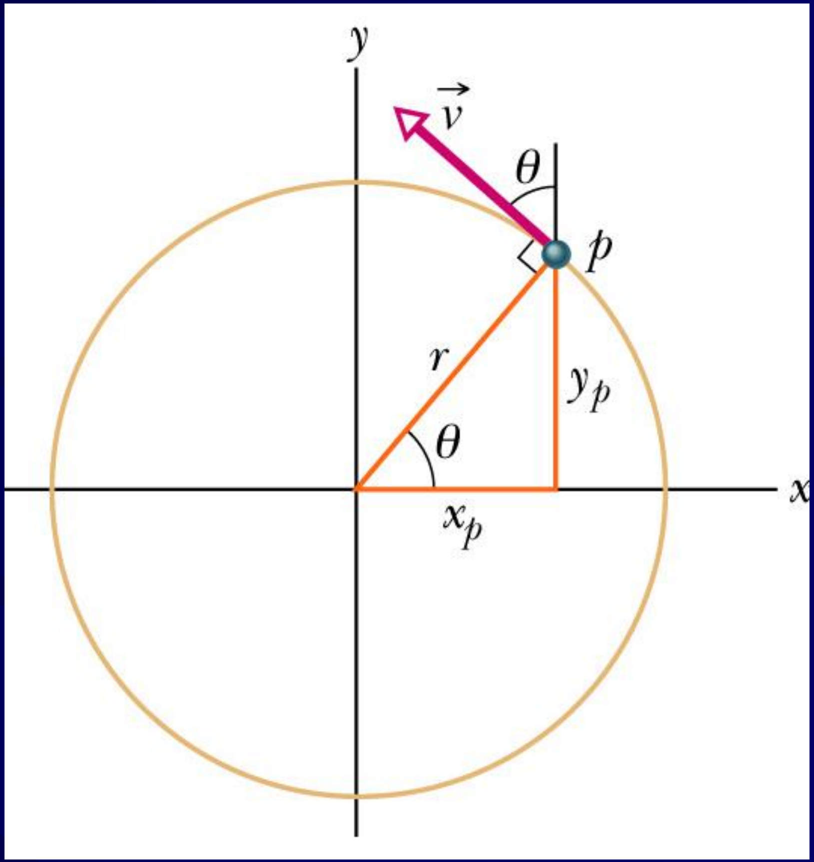
$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

رابطه هندسی بین سرعت و شتاب در حرکتهای مختلف



نحوه بدست آوردن شتاب مرکزگرا

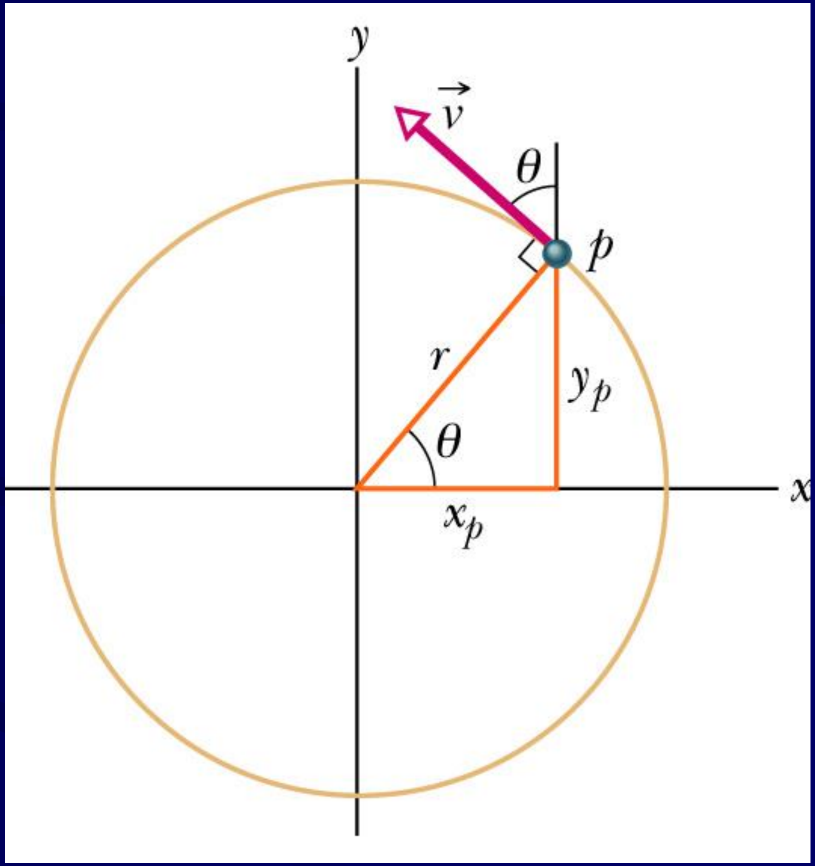
- Now let's derive the centripetal acceleration equation
- Here we see our particle at some instant – it is moving at a constant speed *v* and is located at the point (x_p, y_p)



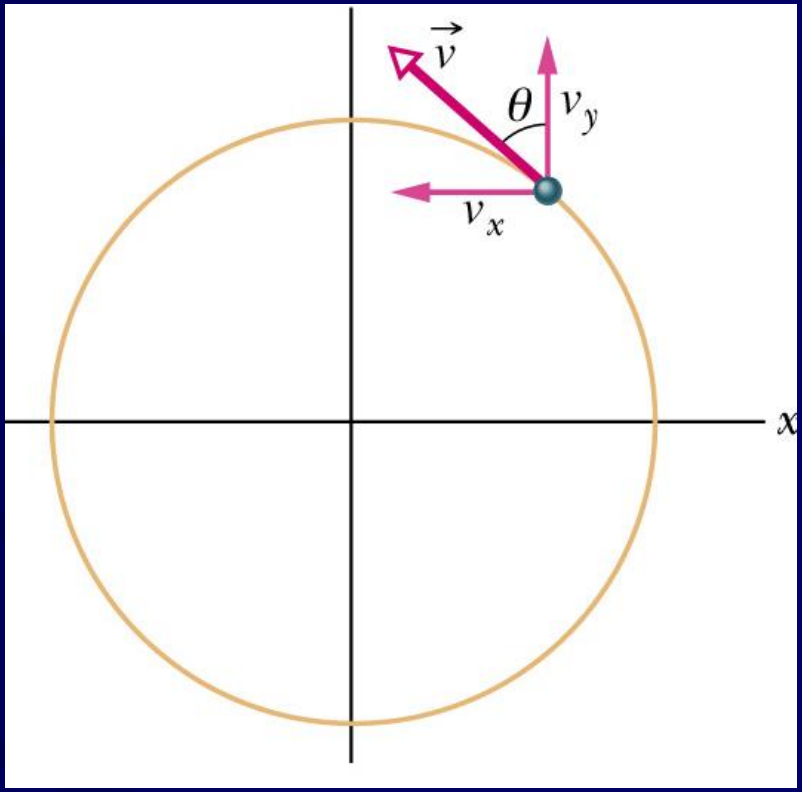
- **We know that the velocity *v* is always tangent to the particle's path**

- That means that *v* is perpendicular to the radius *r* drawn from the origin to the particle's position

- And using a little geometry, we can see that the angle θ between the velocity vector and the vertical line at *p* matches the angle the radius makes with the *x* axis



- **The scalar components of v are shown here as v_x and v_y**



- **The velocity can also be written as:**

$$\vec{v} = v_x \hat{\mathrm{i}} + v_y \hat{\mathrm{j}}$$
$$= \left(-v \sin\theta\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(v \cos\theta\right)\hat{\mathrm{j}}$$

Replacing sin θ with y_p/r and cos θ with x_p/r we get:

$$\vec{v} = \left(-\frac{v y_p}{r}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{v x_p}{r}\right)\hat{\mathrm{j}}$$

We know that we have to take the time derivative of the velocity to get the acceleration

- So we then get:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt} \right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt} \right)\hat{\mathrm{j}}$$

•But we know that dy_p/dt is nothing more than the velocity component v_y; similarly, we know that $dx_p/dt = v_x$

- **We also know from earlier that v_x = - v sin θ and v_y = v cos θ**
- Making those substitutions we finally get:

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r} \cos\theta \right)\hat{\mathrm{i}} + \left(-\frac{v^2}{r} \sin\theta \right)\hat{\mathrm{j}}$$

- To compute the magnitude of a we have:

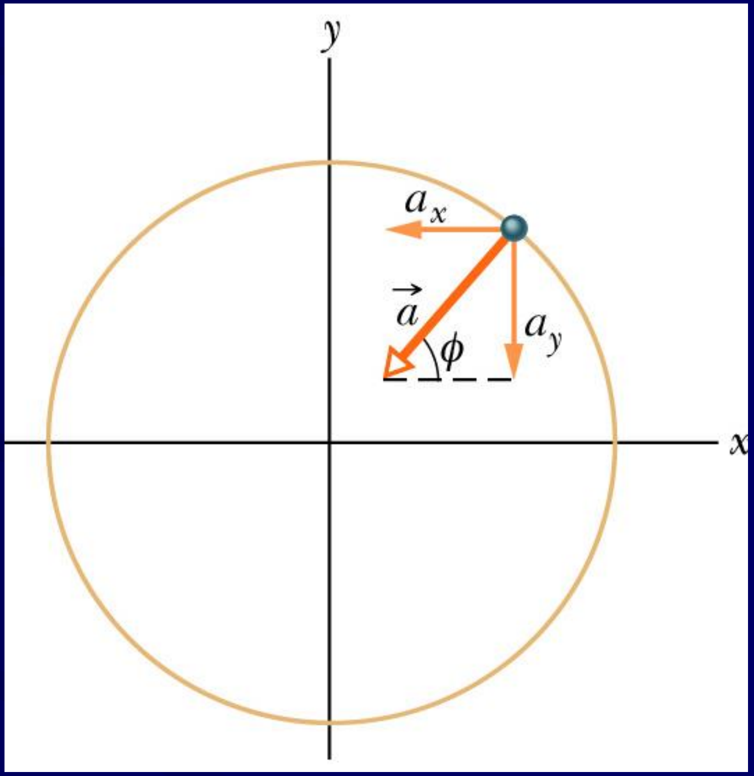
$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \frac{v^2}{r}$$

- To compute the angle ϕ we have:

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_x}$$

$$= \frac{-\left(v^2/r\right)\sin\theta}{-\left(v^2/r\right)\cos\theta}$$

$$= \tan\theta$$



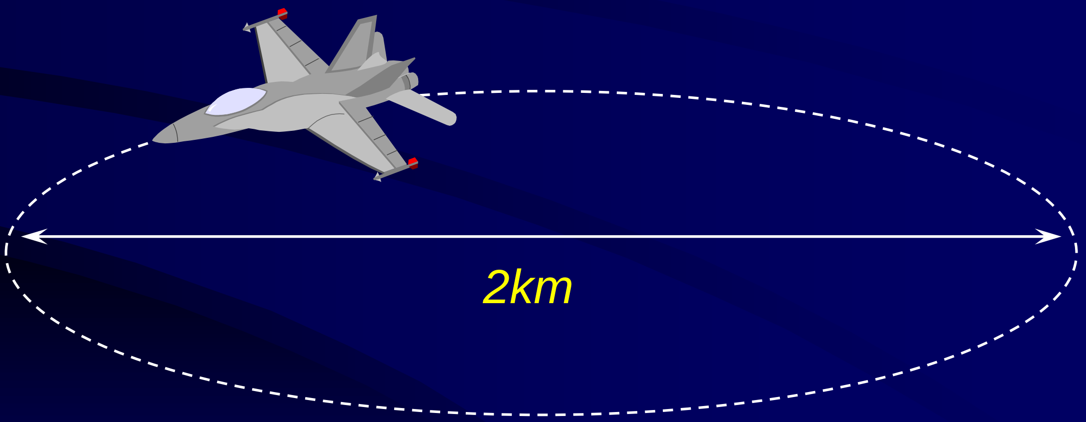
- A fighter pilot flying in a circular turn will pass out if the centripetal acceleration he experiences is more than about *9* times the acceleration of gravity *g*. If his F18 is moving with a speed of *300 m/s*, what is the approximate diameter of the tightest turn this pilot can make?

$$a = \frac{v^2}{R} = 9g$$

$$R = \frac{v^2}{9g} = \frac{90000 \frac{m^2}{s^2}}{9 \times 9.81 \frac{m}{s^2}}$$

$$R = \frac{10000}{9.81} m \approx 1000m$$

$$D = 2R \approx 2000m$$



مثال: زمان یک گردش کامل ماه به دور زمین 27.3 روز است.با فرض اینکه مدار دایره ای و شعاع آن 238000 مایل است. اندازه شتاب ماه به طرف زمین چقدر است؟

$$r = 238000mi\left(\frac{1609m}{1mi}\right) = 3.82\times10^{8}\,m$$

$$T = 27.3d = 2.36\times10^{6}\,s$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(3.82\times10^{8}\,m)}{2.36\times10^{6}\,s} = 1018m/s$$

$$a = \frac{v^{2}}{r} = \frac{(1018m/s)^{2}}{3.82\times10^{8}\,m} = 2.7\times10^{-3}\,m/s^{2}$$

مثال: ماهواره ای در ارتفاع h= 210 km از سطح زمین، به دور زمین می گردد. در این ارتفاع $g=9.2\ m/s^2$ است.سرعت و پریود این ماهواره را پیدا کنید. شعاع زمین R=6370 km است.

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R+h}$$

$$v = \sqrt{(R+h)g} =$$

$$\sqrt{(6370km + 210km)(9.2m/s^2)(10^3 m/km)} = 7780m/s$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6580000m)}{7780m/s} = 3.7h$$

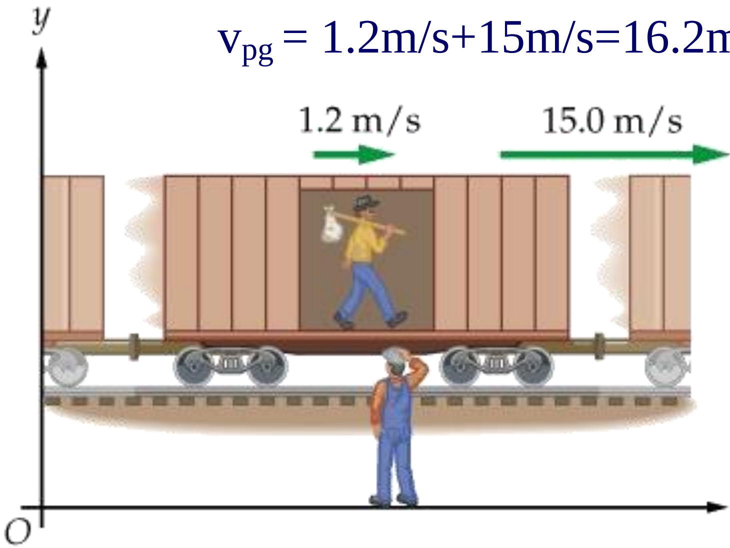
Relative Motion حرکت نسبی

- **A Reference Frame is the place you measure from.**
  - It’s where you nail down your (x,y,z) axes!
- An Inertial Reference Frame (IRF) is one that is not accelerating.
- Valid IRFs can have fixed velocities with respect to each other.

•Now let’s discuss how different observers – in different frames of reference – would see that particle

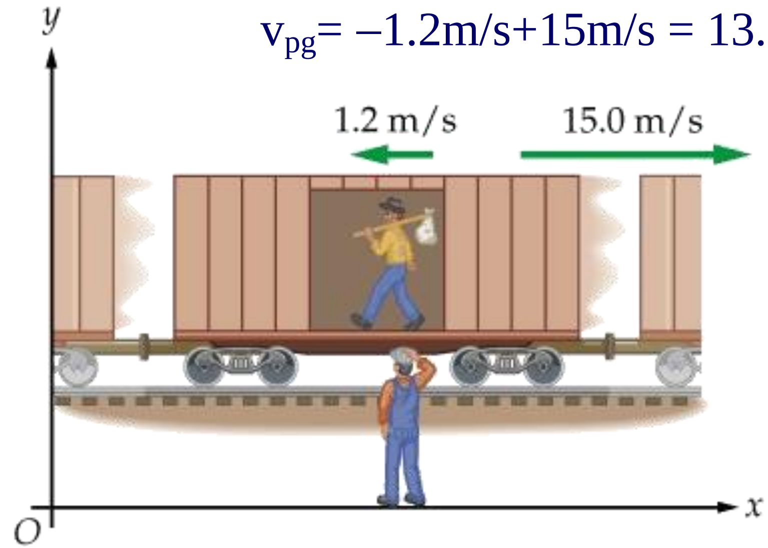
Relative Motion

v_{pg} = 1.2m/s+15m/s=16.2m/s

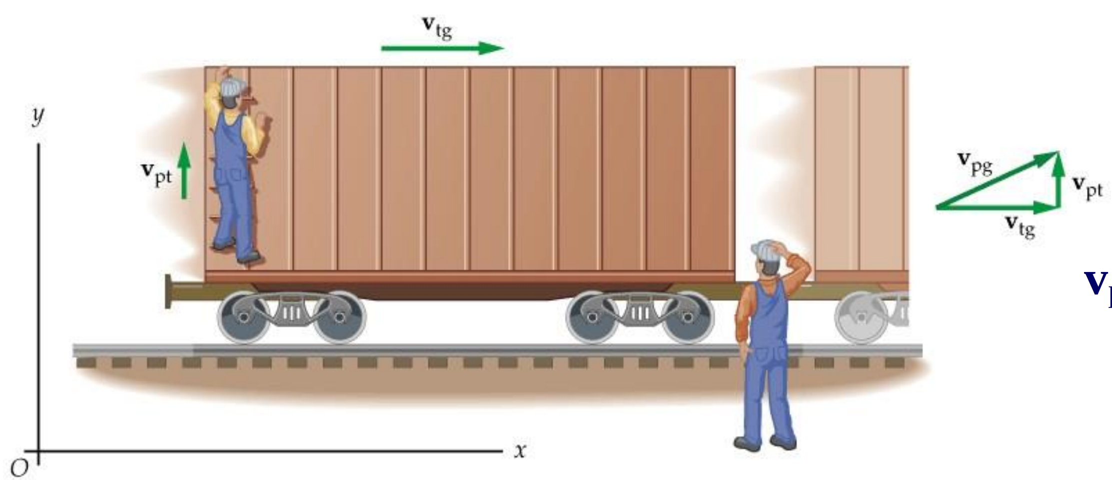


(a)

v_{pg}= –1.2m/s+15m/s = 13.8m/s

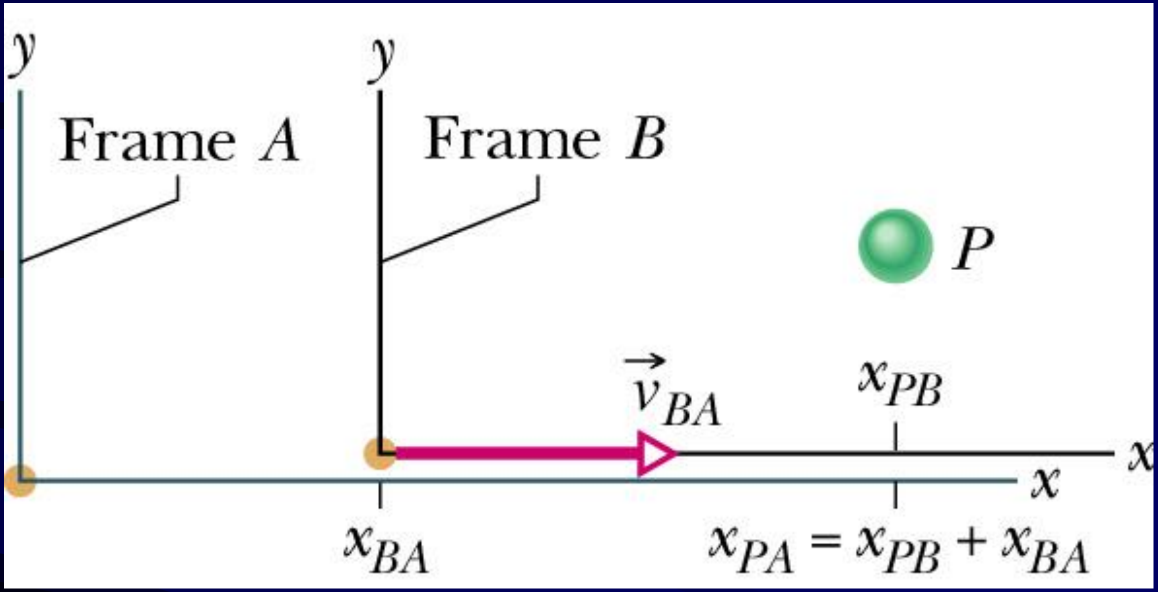


(b)



$\mathbf{v}_{pg}$ = velocity of person relative to ground

Frame A is not moving relative to the ground, but frame B is moving at a constant speed along the highway



- We can see that the following is true:

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$$

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$$

- This tells us that "The position x_{PA} of P as measured by A is equal to the position x_{PB} of P as measured by B plus the position x_{BA} of B as measured by A".

- If we take the time derivative of that relation we get:

$$\frac{d}{dt}\left(x_{PA}\right) = \frac{d}{dt}\left(x_{PB}\right) + \frac{d}{dt}\left(x_{BA}\right)$$

- We know that $v = dx/dt$, so we then get:

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$$

- This tells us that "The velocity v_{PA} of P as measured by A is equal to the velocity v_{PB} of P as measured by B plus the velocity v_{BA} of B as measured by A"

- Now let's differentiate once again to get the acceleration of particle P as viewed in both frames of reference:

$$\frac{d}{dt}\left(v_{PA}\right) = \frac{d}{dt}\left(v_{PB}\right) + \frac{d}{dt}\left(v_{BA}\right)$$

- The result is:

$$a_{PA} = a_{PB}$$

- This is because v_{BA} is constant and therefore drops out when the differential is taken.

- Observers in two different frames of reference (moving with a constant velocity relative to each other) will see that a moving particle has the same acceleration

- **It is important to note that our frames of reference (A and B) are moving with a <u>constant velocity</u> relative to one another.**

- **As such, these are called *inertial frames* of reference (from Newton's 1st Law – the Law of Inertia).**

- **We would <u>not</u> get the same result if frame B were accelerating relative to frame A**

Relative Motion in Two Dimensions

- The relationship for positions gives us:

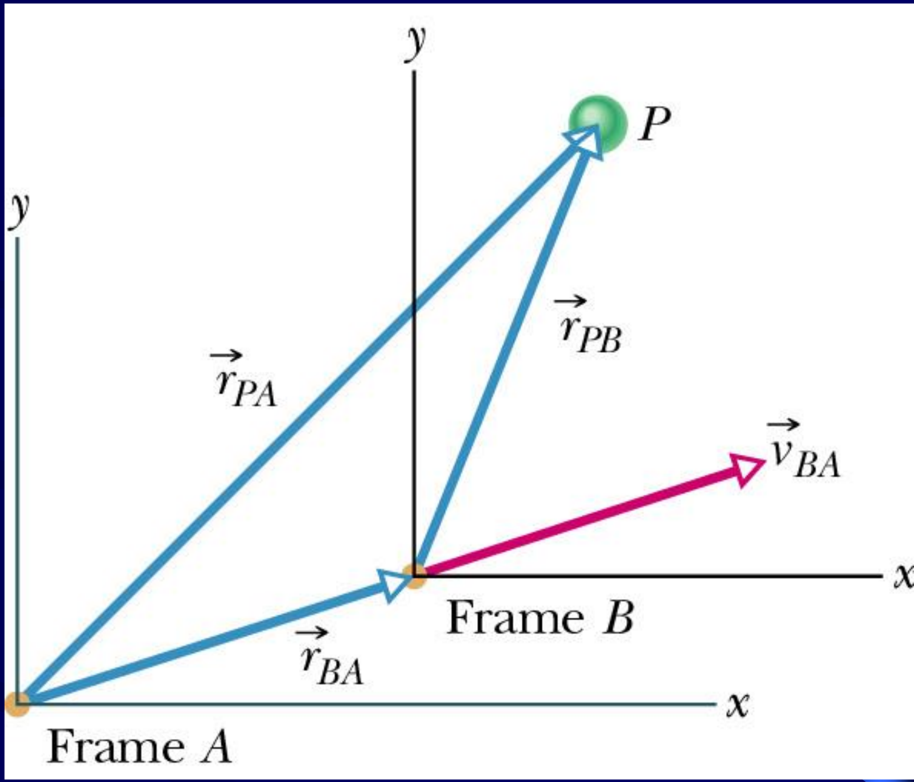
$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

- For velocities we get:

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

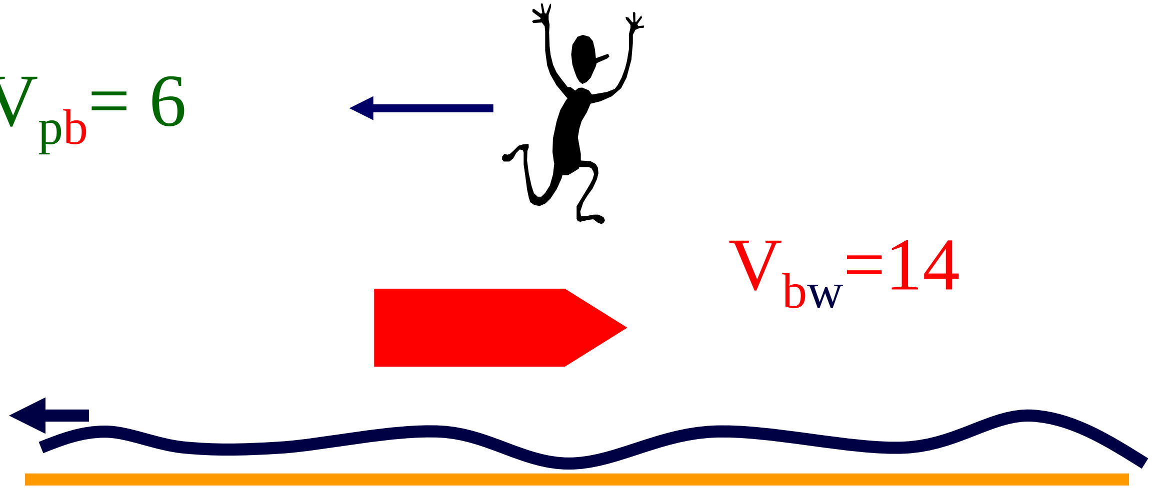
- And finally for acceleration we get:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$



A child walks from the front to rear of the boat at 6 km/hr with respect to the boat. What is the child's velocity with respect to the ground?

$V_{pb} = 6$



$V_{bw} = 14$

down

up

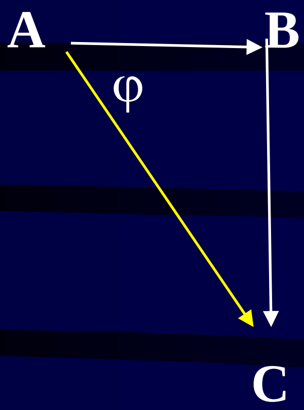
ground $V_{wg} = -9$

$V_{bg} = 5$ km/hr

$$V_{pg} = V_{pb} + V_{bg} = -6 + 5 = -1$$

or - 1 km downstream

1- هواپیمایی از شهر A، 410 mi به طرف شرق پرواز می کند و در مدت 45 min به شهر B می رسد. سپس 820 mi به طرف جنوب پرواز می کند و در مدت 1 h 30 min به شهر C می رسد. (الف) اندازه و جهت بردار جابه جایی مربوط به کل مسیر را بدست آورید.



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = 410\hat{i} - 820\,\hat{j}$$

$$r = \sqrt{(410mi)^2 + (820mi)^2} = 920mi$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{-820}{410} = -63^0$$

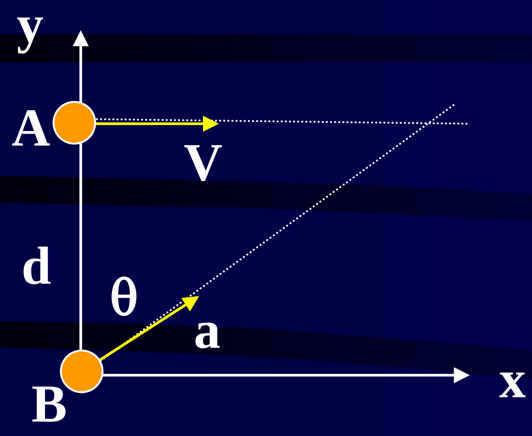
(ب) بردار سرعت متوسط را بدست آورید.

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{410\hat{i} - 820\,\hat{j}}{0.75 + 1.5} = (182\hat{i} - 364\,\hat{j})mi/h$$

(ج) اندازه سرعت متوسط را پیدا کنید.

$$v = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}} = \sqrt{182^2 + (-364)^2} = 407mi/h$$

9- ذره A در راستای خط y=d(30m) با سرعت ثابت V(v=3.0 m/s) در جهت مثبت محور x حرکت می کند. ذره B هنگامیکه که A از محور y می گذرد، با سرعت اولیه صفر و شتاب ثابت a(a=0.40 m/s²) از مبدا شروع به حرکت می کند. زاویه θ بین a و جهت مثبت محور y چقدر باشد تا دو ذره با هم برخورد کنند؟



$$\begin{cases} for\ A \rightarrow x = vt \\ for\ B \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{cases}$$

$$x\hat{i} + y\hat{j} = -y_0\,\hat{j} + 0 + \frac{1}{2}(a\sin\theta\,\hat{i} + a\cos\theta\,\hat{j})t^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 \sin\theta \\ y = -y_0 + \frac{1}{2}at^2\cos\theta \end{cases}$$

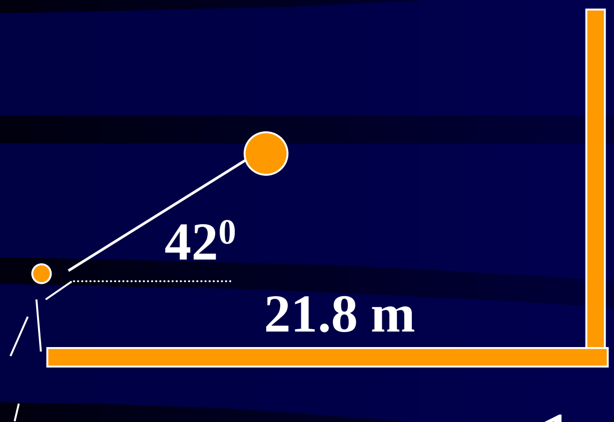
$$vt = \frac{1}{2} a t^2 \sin\theta \rightarrow t = \frac{2v}{a\sin\theta}$$

$$y = 0, \quad y_0 = \frac{1}{2} a \left(\frac{2v}{a\sin\theta}\right)^2 \cos\theta$$

$$\cos^2\theta + \frac{3}{2}\cos\theta - 1 = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^0$$

19- توپ کوچکی را با سرعت 25.3 m/s با زاویه 42.0^0 بالاتر از سطح افق ، مستقیما به طرف دیواری پرتاب می کنیم. دیوار 21.8 m از نقطه پرتاب توپ فاصله دارد.(الف) چقدر طول می کشد تا توپ به دیوار برخورد کند؟



$$x = v_0 \cos\theta \, t \rightarrow t = \frac{21/8}{25.3\cos 42} = 1.16s$$

(ب) توپ چقدر بالاتر از نقطه پرتاب به دیوار برخورد می کند؟

$$y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 = 13m$$

(ج) مولفه های افقی و عمودی سرعت توپ در لحظه برخورد به دیوار چقدر است؟

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta = 18.8 m/s \\ v_y = v_0 \sin\theta - gt = 5.56 m/s \end{cases}$$

(د) آیا توپ، پس از گذشتن از نقطه اوج مسیرس به دیوار می خورد؟

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = 14.7m$$

با مقایسه (ب) و (د)

20- نشان دهید که ارتفاع نقطه اوج پرتابه ، $y_{\max} = \dfrac{(v_0 \sin \varphi_0)^2}{2g}$ است.

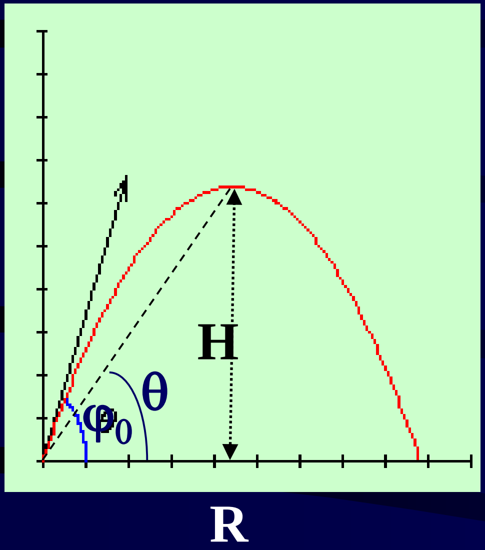
$$y = v_0 t \sin \varphi_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y = v_0 \sin \varphi_0 - gt$$

$$v_y = 0 \rightarrow t = \frac{v_0 \sin \varphi_0}{g}$$

$$3 \rightarrow 1 \quad y_{\max} = \frac{{v_0}^2 \sin^2 \varphi_0}{2g}$$

21- (الف) پرتابه ای را در نظر بگیرید که از سطح زمین با زاویه φ_0بالاتر از سطح افقی پرتاب می شود. نشان دهید ارتفاع نقطه اوج H به برد Rبرابر است با $\frac{H}{R}=\frac{tag\varphi_0}{4}$



$$H=\frac{v_0{}^2\sin^2\varphi_0}{2g}$$

$$R=\frac{v_0{}^2\sin 2\varphi_0}{g}$$

$$\frac{H}{R}=\frac{\sin^2\varphi_0}{2\sin 2\varphi_0}=\frac{\sin^2\varphi_0}{4\sin\varphi_0\cos\varphi_0}=\frac{1}{4}\tan\varphi_0$$

(ب) زاویه پرتاب چقدر باشد تا ارتفاع اوج با برد افقی برابر شود؟

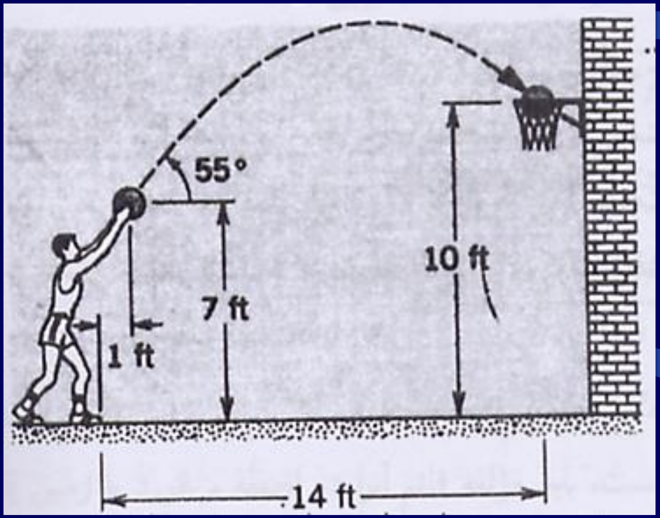
$$1=\frac{1}{4}\tan\varphi_0\rightarrow\tan\varphi_0=4\rightarrow\varphi_0=76^0$$

35- بازیکنی توپ بسکتبال را با زاویه 55 درجه بالاتر از سطح افقی به طرف حلقه پرتاب می کند، سرعت اولیه توپ چقدر باشد تا توپ مستقیما وارد حلقه شود؟ قطر حلقه 18 in است.(اطلاعات دیگر از شکل).

$$y = y_0 + (\tan\varphi_0)x - \frac{g}{2(v_0\cos\varphi_0)^2}x^2$$

$$x = 13\,ft$$

$$v_0 = \ldots\, ft/s$$



42- یک بازیکن بیسبال توپ را با چوب بیسبال در ارتفاع 4.0 ft از سطح زمین چنان می زند که زاویه پرتاب توپ 45^0 و برد افقی آن 350 ft می شود و به نرده ای به ارتفاع 24 ft می رسد که 320 ft از نقطه پرتاب فاصله دارد.آیا توپ از بالای نرده می گذرد، در چه فاصله ای؟

$$y = y_0 + (\tan\varphi_0)x - \frac{g}{2(v_0\cos\varphi_0)^2}x^2$$

$$0 = 4 + 350\tan 45 - \frac{32}{2v_0^{\ 2}\cos^2 45}\times(350)^2$$

$$v_0 = 105.2 \ \ \text{ft/s}$$

$$if \quad x = 320\,ft \rightarrow y = 28.1\,ft \quad \text{from} \quad \text{above equation}$$

$$28.1 > 24 \rightarrow PASS$$

52- فضانوردی در یک دستگاه گریز از مزکز (سانتریفوژ) به شعاع 5.2m چرخانده می شود.
(الف) به ازای چه سرعتی، شتاب فضانورد 6.8g می شود؟

$$v = \sqrt{ra} = \sqrt{(5.2m)(6.8)(9.8m/s^2)} = 18.6m/s$$

(ب) این سرعت متناظر با چند دور بر دقیقه است؟

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \times 3.14 \times 5.2}{18.6} = 1.75s = 0.029\min$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{0.029} = 34.5$$

60- کودکی سنگی را که به نخی بسته است روی دایره ای افقی یه شعاع 1.4m و در ارتفاع 1.9m از سطح زمین می کرداند. نخ پاره می شود و سنگ به طور افقی پرتاب میشود و 11m دورتر به زمین می خورد. شتاب مرکزگرای سنگ در حرکت دایره ای چقدر بوده است؟

$$y = y_0 + x\tan\varphi_0 - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\varphi_0)^2}$$

$$\varphi_0 = 0, \quad x = 11m, \quad y_0 = 1.9m$$

$${v_0}^2 = \frac{gx^2}{2y_0} = \frac{9.8\times 11^2}{2\times 1.9} = 312m/s$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{312}{1.4} = 222.8m/s^2$$

62- (الف) شتاب مرکزگرای اجسام واقع بر استوای زمین (بعلت چرخش بدور خودش) چقدر است؟

$$\begin{cases} v = \dfrac{2\pi r}{T} \\ r = 6.37\times10^{6}\, m, \qquad \mathrm{T} = 8.65\times10^{4}\, s \end{cases}$$

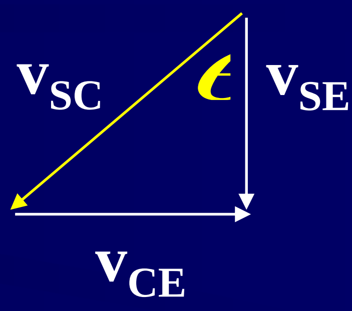
$$a = \frac{v^2}{r}$$

(ب) دوره تناوب چرخش زمین باید چقدر می بود تا شتاب مرکزگرای اجسام روی استوا $9.8 m/s^2$ باشد؟

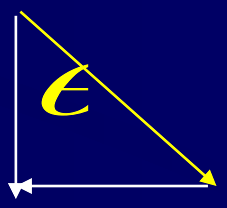
$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} \rightarrow T = \ldots s$$

70- برف در راستای قائم با سرعت ثابت 7.8m/s می بارد.راننده ای اتومبیلش را روی جاده ای مسطح با سرعت 55km/h می راند. از دید راننده، دانه های برف (الف) با چه زاویه ای نسبت به راستای قائم ، و (ب) با چه سرعتی سقوط می کنند؟

$$\vec{v}_{SE} = \vec{v}_{SC} + \vec{v}_{CE}$$



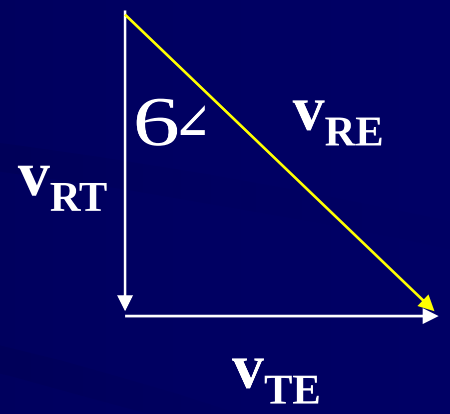
$$\tan\theta = \frac{55\times\dfrac{1000}{3600}m/s}{7.8m/s} = \frac{15.3}{7.8} \to \theta$$



$$v_{SE} = \sqrt{15.3^2 + 7.8^2} = 17.2m/s$$

71- قطاری با سرعت 28m/s (نسبت به زمین) به طرف جنوب در حرکت است. در مسیر باران می بارد و باد باران را به طرف جنوب کج می کند. مسیر قطره های باران، از دید ناظر ساکن بر زمین، با راستای قائم زاویه 64^0 می سازد. اما ناظر سوار بر قطار، بارش را دقیقا عمود به سطح زمین می بیند. سرعت قطره های باران نسبت به زمین چقدر است؟

$$\vec{v}_{RE} = \vec{v}_{RT} + \vec{v}_{TE}$$



$$v_{RE} = \frac{v_{TE}}{\sin 64} = \frac{28m/s}{0.89} = 31.1m/s$$

Thanks for your attention