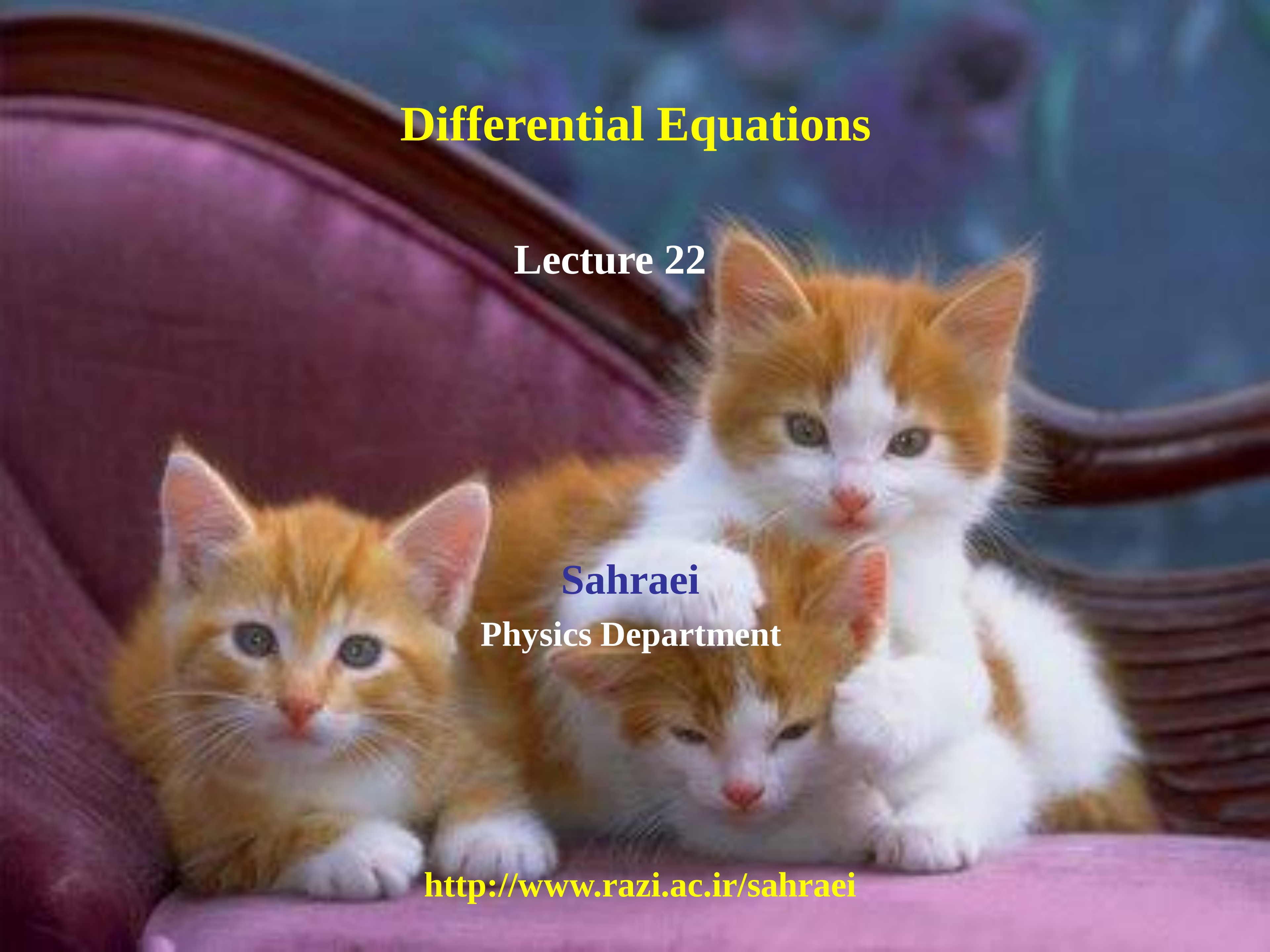


Differential Equations

Lecture 22

Sahraei

Physics Department

http://www.razi.ac.ir/sahraei

Systems of first order Equations

تعريف: مجموعه ای بیش از يك معادله دیفرانسیل همزمان را دستگاه معادلات دیفرانسیل نامیم.

ساده ترین دستگاه معادلات دیفرانسیل دستگاه دو معادله دیفرانسیل می باشد که عبارت است از:

$$\begin{cases} F(t, x, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \dfrac{d^nx}{dt^n}) = 0 \\ G(t, y, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \dfrac{d^my}{dt^m}) = 0 \end{cases}$$

Example: **If s particle of mass *m* moves in the *xy* plane, its equations of motion are**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(t,x,y) \quad , \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = g(t,x,y)$$

Where *f* and *g* represent the *x* and *y* components, respectively, of the force acting on the particle.

ساده ترین دستگاه معادلات دیفرانسیل، دستگاه دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول می باشد که عبارت است از:

$$\begin{cases} F(t,x,\dfrac{dx}{dt})=0 \\ G(t,y,\dfrac{dy}{dt})=0 \end{cases}$$

صورت دیگری از دستگاه دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول بصورت زیر است:

$$\begin{cases} F(t,x,y,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt})=0 \\ G(t,x,y,\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt})=0 \end{cases}$$

Linear Systems

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(t, x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = G(t, x, y) \end{cases}$$

The linear systems, of the form:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y + f_1(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y + f_2(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

If $f_1(t) = f_2(t) = 0$ **then the system is called homogeneous**

روش هایی برای حل برخی از دستگاه دو معادلات دیفرانسیل

روش اول: یکی از معادلات دستگاه مستقلاً قابل حل باشد.

مثال :دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xt - x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2yt + x \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = x(2t-1) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int (2t-1)dt$$

$$\ln x = t^2 - t + c \rightarrow x = e^{t^2 - t + c}$$

$$= e^{t^2 - t} e^{c} \rightarrow x = c_1 e^{t^2 - t}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2yt + c_1 e^{t^2 - t}$$

$$\frac{dy}{dt} - 2ty = c_1 e^{t^2 - t}$$

$$y = e^{-\int -2t dt} \left[\int e^{\int -2t dt} c_1 e^{t^2 - t} dt + c_2 \right]$$

$$y = e^{t^2}\left[c_1\int e^{-t^2} e^{t^2-t}\,dt + c_2\right]$$

$$y = e^{t^2}\left[c_1\int e^{-t}\,dt + c_2\right]$$

$$y = e^{t^2}\left[-c_1 e^{-t} + c_2\right]$$

$$\begin{cases} x = c_1 e^{t^2-t} \\ y = -c_1 e^{t^2-t} + c_2 e^{t^2} \end{cases}$$

روش بالا را می توان برای دستگاه سه معادله نیز بکار برد.

مثلا دستگاه سه معادله زیر را می توان حل کرد.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2t \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 4y + t \end{cases}$$

روش دوم: روش حذفی

حل دستگاه دو معادله مرتبه اول خطی با ضرایب ثابت:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f_1(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + f_2(t) \end{cases}$$

با مشتق گیری از معادلات دستگاه و استفاده از معادله دوم دستگاه آنرا به معادله مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت تبدیل می کنیم که با حل آن قبلاً آشنا شده ایم .

مثال : دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y + x \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + 3y + x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + 3\left(\frac{dx}{dt} - 3x\right) + x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 8x = 0 \qquad x'' - 6x' + 8x = 0$$

$$m^2-6m+8=0 \qquad m_1=4,\ m_2=2$$

$$x=c_1e^{2t}+c_2e^{4t}$$

$$y=\frac{dx}{dt}-3x=2c_1e^{2t}+4c_2e^{4t}-3c_1e^{2t}-3c_2e^{4t}$$

$$y=-c_1e^{2t}+c_2e^{4t}$$

$$\begin{cases} x=c_1e^{2t}+c_2e^{4t} \\ y=-c_1e^{2t}+c_2e^{4t} \end{cases}$$

روش سوم: این روش مشهور به روش عملگر یا اپراتور می باشد.

$$\frac{d}{dt} = D$$

Example 1:

$$\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} + 4y = 1 \\ \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2Dx - x + Dy + 4y = 1 \\ Dx - Dy = t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2D-1)x + (D+4)y = 1 \\ Dx - Dy = t - 1 \end{cases}$$

با ضرب معادله اول در **D**
ومعادله دوم در **D+4** و جمع طرفین دستگاه داریم:

$$D(2D-1)x+(D+4)Dx=D(1)+(D+4)(t-1)$$

$$(2D^2-D+D^2+4D)x=D(1)+D(t)+4t-D(1)-4$$

$$(3D^2+3D)x=4t-3$$

این معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت غیرهمگن می باشد پس:

$$3D^2+3D=0 \quad 3D(D+1)=0 \rightarrow D=0 \ , \ D=-1$$

$$x_g=c_1+c_2e^{-t} \qquad x_p=t(A_1t+A_\circ)$$

$$x_p=A_1t^2+A_\circ t \rightarrow x'_p=2A_1t+A_\circ \rightarrow x''_p=2A_1$$

$$3x_p'' + 3x_p' = 4t - 3$$

$$6A_1 + 6A_1 t + 3A_\circ = 4t - 3 \rightarrow A_1 = \frac{2}{3},\ A_\circ = -\frac{7}{3}$$

$$x_p = \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t$$

$$x = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{2}{3}t^2 - \frac{7}{3}t$$

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = t - 1 \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - t + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -c_2 e^{-t} + \frac{4}{3}t - \frac{7}{3} - t + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{3}$$

$$\int dy = \int (-c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{3})dt$$

$$y = c_2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^2 - \frac{4}{3}t + c_3$$

$$\begin{cases} x = c_1 + c_2 e^{-t} + \dfrac{2}{3}t^2 - \dfrac{7}{3}t \\ y = c_2 e^{-t} + \dfrac{1}{6}t^2 - \dfrac{4}{3}t + c_3 \end{cases}$$

Example 2:

$$\begin{cases} x' - 2x - 3y = 2e^{2t} \\ -x + y' - 4y = 3e^{2t} \end{cases} \qquad D = \frac{d}{dt}$$

$$\begin{cases} (D-2)x - 3y = 2e^{2t} \\ -x + (D-4)y = 3e^{2t} \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2e^{2t} & -3 \\ 3e^{2t} & D-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-2 & -3 \\ -1 & D-4 \end{vmatrix}} = \frac{4e^{2t} - 8e^{2t} + 9e^{2t}}{D^2 - 6D + 5} = \frac{5e^{2t}}{D^2 - 6D + 5}$$

$$(D^2-6D+5)x=5e^{2t}$$

$$x=c_1e^t+c_2e^{5t}-\frac{5}{3}e^{2t}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} D-2 & 2e^{2t} \\ -1 & 3e^{2t} \end{vmatrix}}{D^2-6D+5}=\frac{2e^{2t}}{D^2-6D+5}$$

$$(D^2-6D+5)y=2e^{2t} \qquad y=Ae^t+Be^{5t}-\frac{2}{3}e^{2t}$$

$$x, x', y \rightarrow (1) \qquad \begin{cases} x' - 2x - 3y = 2e^{2t} \\ -x + y' - 4y = 3e^{2t} \end{cases}$$

$$c_1 e^t + 5c_2 e^{5t} - \frac{10}{3} e^{2t} - 2c_1 e^t - 2c_2 e^{5t} + \frac{10}{3} e^{2t} - 3Ae^t$$

$$-3Be^{5t} + 2e^{2t} = 2e^{2t}$$

$$\begin{cases} -c_1 - 3A = 0 \\ 3c_2 - 3B = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow c_1 = -3A, \quad c_2 = B$$

$$\begin{cases} x = -3Ae^t + Be^{5t} - \dfrac{5}{3} e^{2t} \\ y = Ae^t + Be^{5t} - \dfrac{2}{3} e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 2y - x = e^t + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dz}{dt} + z + 2y = e^t + 2 \\ \dfrac{dz}{dt} + \dfrac{dx}{dt} - x + z = e^t + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D-1)x + (D+2)y = e^t + 1 \\ (D+2)y + (D+1)z = e^t + 2 \\ (D-1)x + (D+1)z = e^t + 3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} D-1 & \mathrm{D}+2 & 0 \\ 0 & \mathrm{D}+2 & \mathrm{D}+1 \\ D-1 & 0 & \mathrm{D}+1 \end{vmatrix} = 2(D+2)(D+1)(D-1)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^t + 1 & \mathrm{D} + 2 & 0 \\ e^t + 2 & \mathrm{D} + 2 & \mathrm{D} + 1 \\ e^t + 3 & 0 & \mathrm{D} + 1 \end{vmatrix}}{2(D+2)(D+1)(D-1)} = \frac{e^t + 2}{2(D-1)}$$

$$2(D-1)x = e^t + 2 \qquad \frac{dx}{dt} - x = 1 + \frac{1}{2}e^t$$

$$x = e^{-\int p\,dt}\left(\int e^{\int p\,dt} Q(t)\,dt + c\right)$$

$$x = \frac{t}{2}e^t - 1 + c_1 e^t$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} \mathrm{D}-1 & e^t+1 & 0 \\ 0 & e^t+2 & \mathrm{D}+1 \\ D-1 & e^t+3 & \mathrm{D}+1 \end{vmatrix}}{2(D+2)(D+1)(D-1)}=\frac{e^t}{2(D+2)}$$

$$2(D+2)y=e^t \qquad \frac{dy}{dt}+2y=\frac{1}{2}e^t$$

$$y=e^{-\int pdt}\left(\int e^{\int pdt}Q(t)dt+c\right)$$

$$y=\frac{1}{6}e^t+c_2e^{-2t}$$

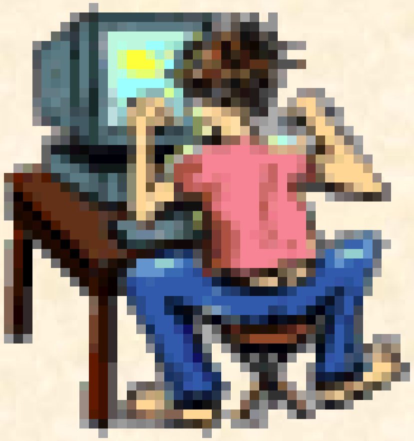
$$z = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{D}-1 & \mathrm{D}+2 & e^t+1 \\ 0 & \mathrm{D}+2 & e^t+2 \\ D-1 & 0 & e^t+3 \end{vmatrix}}{2(D+2)(D+1)(D-1)} = \frac{e^t+4}{2(D+1)}$$

$$2(D+1)\mathrm{z} = e^t + 4 \qquad \frac{dz}{dt} + z = \frac{1}{2}e^t + 2$$

$$z = e^{-\int pdt}\left(\int e^{\int pdt} Q(t)dt + c\right)$$

$$z = \frac{1}{4}e^t + 2 + c_3 e^{-t}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{2}e^t - 1 + c_1 e^t \\ y = \dfrac{1}{6}e^t + c_2 e^{-2t} \\ z = \dfrac{1}{4}e^t + 2 + c_3 e^{-t} \end{cases}$$



Thanks for your attention